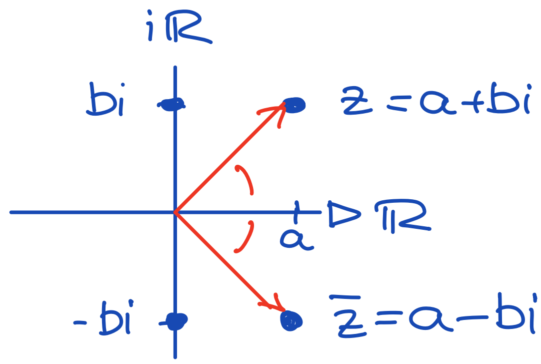
Def. 1.67 KONJUGIERT KOMPLEXE ZAHL

Es sei $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Dann heißt

$$\bar{z} := a - bi \qquad (= a + (-b) \cdot i)$$

die zu z konjugiert komplexe Zahl.
Sprechweisen: „z konjugiert" oder „z quer"



$\bar{z}$ geht durch Spiegelung an der reellen Achse aus z hervor

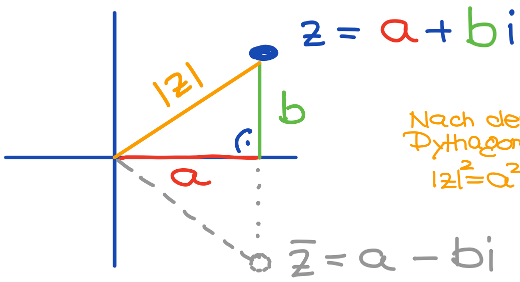
Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung
$$x^2 + px + q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{R})$$
bilden (im Fall $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$)
ein zueinander konjugiert komplexes Paar.

<u>Bem:</u>
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

  bzw. $\{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = z\} = \mathbb{R}$

Def. 1.68 BETRAG EINER KOMPLEXEN ZAHL

Es sei $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Der Abstand von z zum Nullpunkt (Ursprung) in der komplexen Ebene wird als Betrag von z bezeichnet:
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$



Nach dem Satz des Pythagoras gilt $|z|^2 = a^2 + b^2$

* $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

* $|z| = 0 \iff z = 0$

* Der Betrag einer komplexen Zahl ist „abwärtskompatibel" zum („verträglich mit dem") Betrag reeller Zahlen:

  Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{\underbrace{Re(x)}_{=x}{}^2 + \underbrace{Im(x)}_{=0,\text{ da } x \in \mathbb{R}}{}^2}$

Arithmetik in $\mathbb{C}$

* Rechnen „wie bisher" unter Beachtung von $i^2 = -1$.
* Für $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ mit $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ gelten

  (i) Summe komplexer Zahlen

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$$
$$= \underbrace{(a_1 + a_2)}_{\in \mathbb{R}} + i\underbrace{(b_1 + b_2)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{C}$$

  entspricht geometrisch der Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$

(ii) Produkt komplexer Zahlen

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)$$

$$= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + \underbrace{i^2}_{i^2=-1} b_1b_2$$

$$= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 - b_1b_2$$

$$= \underbrace{(a_1a_2 - b_1b_2)}_{\in \mathbb{R}} + i\,\underbrace{(a_1b_2 + b_1a_2)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{C}$$

(iii) Kehrwert einer komplexen Zahl $\neq 0$

Es sei $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d.h. $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \neq b$.

Kehrwert von z:

Erweitern mit konjugiertem Nenner $a - ib$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$$

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

3. bin. Formel

$$= \frac{a-bi}{a^2 - (bi)^2}$$

$$= \frac{a-bi}{a^2 - b^2 \cdot \underbrace{i^2}_{=-1}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-bi}{|z|^2}$$

$$= \underbrace{\frac{a}{|z|^2}}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\frac{b}{|z|^2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot i \in \mathbb{C}$$

$$\mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{z}\right) = \frac{a}{|z|^2}\ , \quad \mathrm{Im}\left(\tfrac{1}{z}\right) = -\frac{b}{|z|^2}$$

Speziell folgt:

Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, so gilt mit $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$:

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = a - ib$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Hätte man auch so sehen können}\\ 1 = |z|^2 = a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)\\ \Rightarrow \dfrac{1}{a+ib} = a - ib\end{array}}$$

zur Arithmetik in $\mathbb{C}$:
siehe hierzu: Buch Lin. Alg., Seite 42, Satz 1.69

Hinweis: In vielen Büchern, insb. in der Elektrotechnik, wird statt „i" der Buchstabe „j" für die imaginäre Einheit verwendet.

Hintergrund: I bzw. i steht in der E-Technik für Strom.

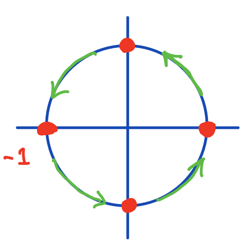
Rechnen wie bisher, dabei beachten: $i^2 = -1$

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1 \quad | \cdot i$
$i^3 = -i \quad | \cdot i$
$i^4 = -i \cdot i = +1 \quad | \cdot i$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$
$i^7 = -i$
$i^8 = 1$

Die Potenzen von i verhalten sich zyklisch:

$i = i^1 = i^5 = i^9 = \ldots$ Div.-Rest $= 1$

4er Zyklus



$\ldots = i^{10} = i^6 = i^2 = -1$
Div.-Rest 2

$1 = i^0 = i^4 = i^8 = \ldots$
Divisionsrest 0
„bei Div. durch 4"

$-i = i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots$
Div.-Rest 3

i^k: Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn
= mathematisch positiver Drehsinn.

zB. i^{37}:

$$i^{36} = i^4 = i^0 = 1 \quad | \cdot i$$

$$\Rightarrow i^{37} = 1 \cdot i = i$$

$$\boxed{\text{REGEL: } i^k = i^{k \bmod 4} \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

Beispiele:

$$i^{353463} \overset{\uparrow}{=} i^{\cancel{3534}63} = i^{63} = i^{63 \bmod 4}$$

Hunderter sind stets durch 4 teilbar

$$= i^3 = -i$$

$$i^{-13769} = i^{-13769 \bmod 4} = i^{\underbrace{-69 \bmod 4}_{-1}} = i^{-1} = -i$$

Rechenregeln und kleine Tricks:

$z \in \mathbb{C}$, was ist im Fall $z \neq 0$ der Kehrwert von z?

$$\frac{1}{z} \overset{\uparrow}{=} \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} \cdot i$$

Erweitern mit konjugiertem Nenner

$$1 = -i \cdot i$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{i} = -i$$

$$\parallel \qquad \parallel$$

$$i^{-1} = \bar{i}$$

Der Faktor i kann „durch den Bruchstrich geschoben werden", indem ein Minuszeichen erzeugt wird:

$$\frac{x \cdot i}{y} = \overset{}{-}\frac{x}{y \cdot i} \quad , \quad \frac{x}{y \cdot i} = -\frac{x \cdot i}{y}$$

$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{i}{2}(\bar{z}-z)$

Bew: $z = a+bi$, $a,b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}(a+\cancel{ib}+a-\cancel{ib}) = \frac{1}{2}(a+a) = a = \mathrm{Re}\, z$$